ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА (ТЗ)

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции **одного вида** из нескольких пунктов отправления (ПО) в пункты назначения (ПН). При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*. Пунктами отправления, или *Поставщиками*, могут быть фабрики, отделы, склады. Пунктами назначения, или *Потребителями*, также могут быть фабрики, отделы, склады.

Постановка задачи. Некоторый однородный товар (продукт, груз), находящийся у m поставщиков A_i в количестве a_i единиц $(i = 1,2,...,m)$ необходимо доставить n потребителям B_j в количестве b_j единиц $(j = 1,2,...,n)$. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить план перевозки, имеющий минимальную стоимость. Основное предположение, используемое при построении модели, состоит в том, что величина транспортных расходов на каждом маршруте прямо пропорциональна количеству единиц перевозимого товара.

Экономико–математическая модель

Требуется найти план перевозок $X = \{x_{ij}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$, минимизирующий общую стоимость всех перевозок

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ (i = 1,2,...,m); \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \ (j = 1,2,...,n); \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0, \ (i = 1,2,...,m; \ j = 1,2,...,n). \qquad (4)$$

Целевая функция **Z** представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Ограничения (2) означают, что суммарный объем перевозок от i –го поставшика не может превышать имеющегося у него запаса товара. Ограничения (3) означают, что суммарные перевозки товара j –му потребителю должны полностью удовлетворить его потребности в товаре.

Если имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (5),$$

то модель называется **сбалансированной транспортной моделью**. В ней ограничения (2)…(4) имеют вид равенств. Несбалансированную ТЗ называют также ***открытой*** ТЗ, а сбалансированную – ***закрытой*** ТЗ.

Доказана теорема: закрытая ТЗ всегда имеет решение.

Наглядной формой представления ТЗ является транспортная матрица

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, [ед. прод.]
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность [ед. прод.]	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Пример 1. С трех складов необходимо вывести одноименный товар в три магазина. На Складе_1 имеется 12000 ед.тов., на Складе_2 – 8000 ед.тов., на Складе_3 – 6000 ед.тов. Магазин_1 может принять 10000 ед.тов, Магазин_2 – 9000 ед.тов., Магазин_3 – 7000 ед.тов. Определить оптимальный план грузоперевозок. Расстояния перевозки приведены в таблице

	Магазин_1	Магазин_2	Магазин_3
Склад_1	70	95	80
Склад_2	60	110	75
Склад_3	100	85	95

Проверим условие сбалансированности. Сумма товаров, имеющихся на складах, 12000+8000+6000=26000; сумма товаров, которые могут принять магазины: 10000+9000+7000=26000, т.е. задача сбалансирована. Целевая функция:

$$Z = (70x_{11} + 95x_{12} + 80x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 75x_{23} + 100x_{31} + 85x_{32} + 95x_{33})c \to \min$$

Поскольку стоимость перевозки одинакова, она не влияет на результат решения, и ее можно не учитывать. Система ограничений

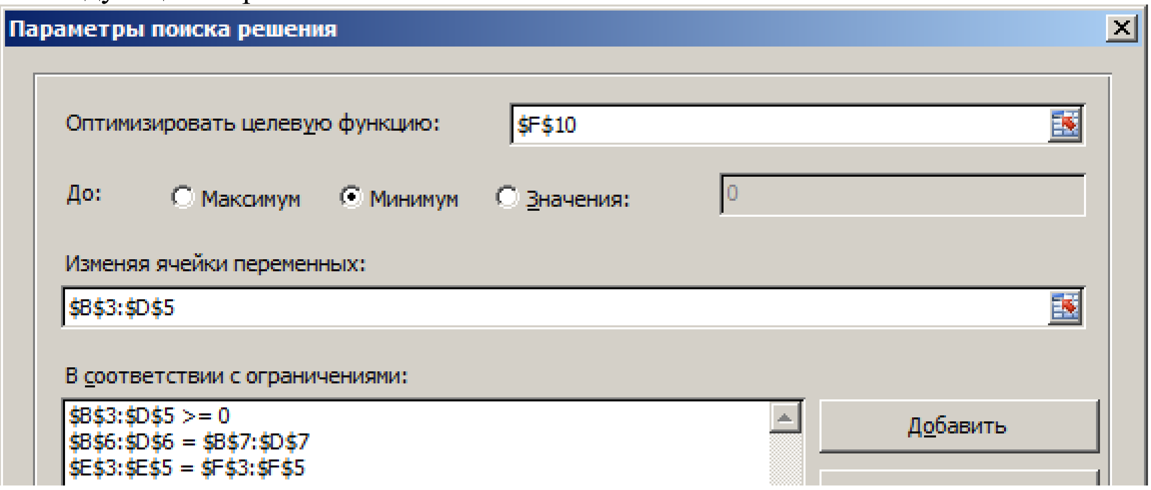
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 12000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 8000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 6000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7000 \end{cases}$$

Заполнение листа Excel

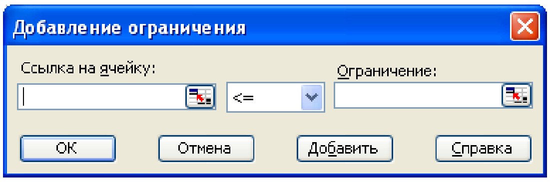
	A	B	C	D	E	F
1		**Переменные**				
2	**Пункт**	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Итого	Имеется
3	Склад 1				=СУММ(B3:D3)	12000
4	Склад 2				=СУММ(B4:D4)	8000
5	Склад 3				=СУММ(B5:D5)	6000
6	принято	=СУММ(B3:B5)	=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)		
7	может принять	10000	9000	7000		
8						
9		**Расстояния**				**ЦФ**
10		70	95	80	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;B10:D10)	**=СУММ(E10:E12)**
11		60	110	75	=СУММПРОИЗВ(B4:D4;B11:D11)	
12		100	85	95	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;B12:D12)	

(от ячейки E10 автозаполнение до ячейки E12).

Вкладка **Данные** → группа **Анализ**. Появится окно «Поиск решения», которое нужно заполнить следующим образом.

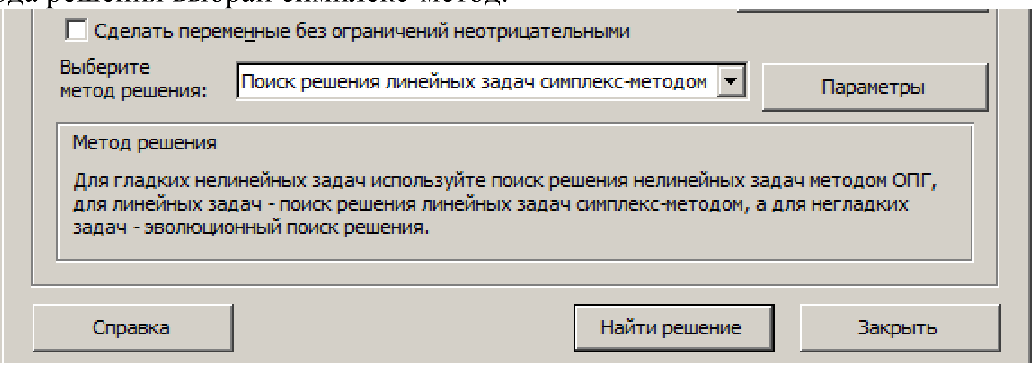


Для ввода ограничений следует щелкнуть по кнопке Добавить. Появится диалоговое окно «Добавление ограничения»



В поле «Ссылка на ячейку» ввести диапазон **B3:D5 (искомые переменные)**, ВЫДЕЛЯЯ ЕГО МЫШЬЮ; в ниспадающем меню выбрать знак >=, в поле «Ограничения» набрать **0** (изменяемые ячейки должны иметь положительные значения). Щелкнуть по кнопке Добавить, в поле «Ссылка на ячейку» ввести диапазон **B6:D6**, в ниспадающем меню выбрать знак = **,** в поле «Ограничение» ввести диапазон **B7:D7**.

Щелкнуть по кнопке Добавить, в поле «Ссылка на ячейку» ввести диапазон **E3:E5**, в ниспадающем меню выбрать знак = **,** в поле «Ограничение» ввести **F3:F5,** кн. ОК. Диалоговое окно заполнено. При этом возвращаемся в окно «Поиск решения». Проверяем, что в качестве метода решения выбран симплекс-метод.



Щелкаем на кнопке Найти решение. Появится окно «Результаты поиска решения». В верхней части окна должна появиться надпись:

«Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены».

	A	B	C	D	E	F
1		**Переменные**				
2	**Пункт**	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Итого	Имеется
3	Склад 1	2000	3000	7000	12000	12000
4	Склад 2	8000	0	0	8000	8000
5	Склад 3	0	6000	0	6000	6000
6	принято	10000	9000	7000		
7	может принять	10000	9000	7000		

В ячейках B3:D5 появляются результаты расчетов.

Ответ. Со Склада 1, на котором имеется 12000 ед.тов., 2000 ед.тов. нужно доставить в Магазин 1, 3000 ед.тов. - в Магазин 2 и 7000 ед.тов. – в Магазин 3. Со Склада 2 весь запас в 8000 ед.тов. следует отправить в Магазин 1. Со Склада 3 весь запас в 6000 ед.тов. нужно отправить в Магазин 2.

В результате получим минимальный общий путь перевозок Z = 1975000.

Пример 2. На товарных станциях С1 и С2 имеется по 30 комплектов мебели. Известно, что перевозка одного комплекта со станции С1 в магазины М1, М2, М3 стоит 1 ден.ед, 3 ден.ед, 5 ден.ед, а стоимость перевозки со станции С2 в те же магазины – 2 ден.ед, 5 ден.ед, 4 ден.ед необходимо доставить в каждый магазин по 20 комплектов мебели. Составить план перевозок так, чтобы затраты на транспортировку мебели были наименьшими.
Проверим условие сбалансированности. На обеих станциях имеется 60 комплектов; три магазина суммарно могут принять 60 комплектов.

Целевая функция: $Z = 1x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 2x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} \to \min$

Система ограничений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ x_{12} + x_{22} = 20 \\ x_{13} + x_{23} = 20 \end{cases}$$

Заполнение листа Excel

	A	B	C	D	E	F
1		**Переменные**				
2	**Пункт**	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Итого	Имеется
3	Станция 1				0	30
4	Станция 2				0	30
5	принято	0	0	0		
6	может принять	20	20	20		
7						
8		**Цены**				**ЦФ**
9		1	3	5	0	**0**
10		2	5	4	0	

Решение

	A	B	C	D	E	F
1		**Переменные**				
2	**Пункт**	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Итого	Имеется
3	Станция 1	10	20	0	30	30
4	Станция 2	10	0	20	30	30
5	принято	20	20	20		
6	может принять	20	20	20		
7						
8		**Цены**				**ЦФ**
9		1	3	5	70	**170**
10		2	5	4	100	

Ответ. Со Станции 1 следует отправить 10 комплектов в Магазин 1 и 20 – в Магазин 3. Со Станции 2 следует отправить 10 комплектов в Магазин 1 и 20 – в Магазин 2, что обеспечит минимальные затраты на перевозку 170 ден.ед.